הפקולטה למתמטיקה, הטכניון
סמסטר אביב, תשס"ז

בחינה בחדו"א 1/מ, מועד א' (104010)

מורה אחראי: פרופ' יואב בנימיני

- משך הבחינה שלוש שעות.
- הניקוד: יש 13 שאלות אמריקאיות. בשבע הראשונות יש לבחור תשובה נכונה מתוך חמש אפשרויות, וכל תשובה נכונה מזכה ב- 5 נקודות. בשש האחרונות יש לבחור בין שתי אפשר-ויות, וכל תשובה נכונה מזכה ב- 3 נקודות.

  יש 3 שאלות פתוחות המזכות ב- 50 נקודות (הפירוט מצויין ע"י כל סעיף).

  סך הנקודות הוא 103 אך הציון המכסימלי הוא 100!
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש למלא את כל הפרטים האישיים הן בטופס התשובות האמריקאיות והן בראש כל דף תשובות לשאלות הפתוחות.
- החלק האמריקאי:
  - לכל שאלה יש בדיוק תשובה אחת.
  - את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בטופס המיועד לכך, ולהקפיד על מילוי הטופס עפ"י ההוראות.
  - יש להגיש רק את טופס התשובות, ולא את דפי השאלות.
  - יש 9 טורי בחינה שונים. מספר הטור של הבחינה שלך מופיע בראש דף השאלות האמרי-קאיות. יש להקפיד ולהעתיק את מספר הטור במקום המיועד לכך בטופס התשובות!
- החלק הפתוח:
  - יש למלא את הפרטים האישיים בטופס המצורף ובראש כל דף.
  - יש לתת פתרון מלא ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.

בהצלחה!

שאלות אמריקאיות

שימו לב שיש הבדל בסדר השאלות בין הטפסים השונים.

שאלה 1. הגבול

$$\lim_{x\to 0}\Big(1+\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)^{\frac{1}{x}}$$

הוא

א. e ב. 1 ג. $\sqrt{e}$ ד. e^2 ה. ∞

התשובה הנכונה היא ד.

ניקח לוגריתם ונחשב הגבול של $\frac{\ln\left\{1+\ln(1+x)-\ln(1-x)\right\}}{x}$ ע"י לופיטל (המונה והמכנה שואפים לאפס!).
נקבל את הביטוי

$$\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}}{1+\ln(1+x)-\ln(1-x)}$$

שגבולו הוא 2, ולכן הגבול המבוקש הוא e^2.

שאלה 2. תהי $F(x)=\int_{|\sin x|}^{|\cos x|} e^{t^2}dt$. אז

א. F מונוטונית בקטע $[0,\pi]$

ב. ל- F יש מקסימום מקומי בנקודה $x=0$

ג. F גזירה בנקודה $x=0$

ד. F מונוטונית עולה בסביבת הנקודה $x=\frac{\pi}{4}$

ה. ל- F יש מינימום מקומי בנקודה $x=0$

התשובה הנכונה היא ב.

(א) אינו נכון כי $F(0)=F(\pi)=\int_0^1 e^{t^2}dt>0$ אך $F(\frac{\pi}{2})=\int_1^0 e^{t^2}dt<0$.

כדי לבדוק את שאר הסעיפים נגדיר $G(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2}dt$ ונשים לב כי $F(x)=G(x)$ כאשר $\sin x;\cos x\geq 0$. בפרט זה נכון עבור $0\leq x\leq \pi/2$.

הפונקציה G היא מהצורה $G(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ כאשר f פונקציה רציפה והפונקציות $a(x),b(x)$ גזירות. לכן, ע"ס המשפט היסודי של החדו"א, G גזירה לכל x ונגזרתה היא

$$G'(x)=(\cos x)'e^{\cos^2 x}-(\sin x)'e^{\sin^2 x}=-\Big(e^{\cos^2 x}\sin x+e^{\sin^2 x}\cos x\Big)$$

בפרט $G'(x)\leq 0$ כאשר $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$. היות ו- $F'(x)=G'(x)<0$ בסביבת $\frac{\pi}{4}$ נקבל כי F מונוטונית יורדת שם ו- (ד) לא נכון.

הנגזרת מימין של F ב- $x=0$ מתלכדת עם זו של G, ולכן $F'_+(0)=G'_+(0)=G'(0)=-1$.
היות ו- F זוגית נקבל כי $F(x)=F(-x)=G(-x)$ לכל $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$, ולכן חישוב דומה ייתן כי $F'(x)\ge 0$ בתחום זה וכי הנגזרת משמאל $F'_-(0)$ היא $+1$. ולכן F איננה גזירה ב- $x=0$ ו- (ג) איננו נכון.
לסיום, F' משנה סימן ב- $x=0$ מחיובי לשלילי, כלומר יש ל- F מכסימום מקומי ב- $x=0$, ולכן (ב) נכון ו- (ה) לא.

<u>הערה</u>: למעשה יש ל- F מכסימום מוחלט ב- $x=0$ כי $0\le|\sin x|;|\cos x|\le 1$ לכל x ו- e^{t^2} פונקציה חיובית, ולכן

$$|F(x)|=\left|\int_{|\sin x|}^{|\cos x|}e^{t^2}dt\right|\le\int_0^1 e^{t^2}dt=F(0)$$

<u>שאלה 3.</u> ערך האינטגרל $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin(\ln x)\,dx$ הוא

א. $e^{\frac{\pi}{2}}$ ב. $-e^{\frac{\pi}{2}}$ ג. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ ד. $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ ה. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

<u>התשובה הנכונה היא ג.</u>
נסמן את האינטגרל ב- I, ונציב $\ln x=y$ (או $x=e^y$). ואז $dx=e^ydy$ ו- y משתנה בין 0 לבין $\frac{\pi}{2}$, ועלינו לחשב את $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^y\sin y dy$. אינטגרציה בחלקים פעמיים תתן

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^y\sin y\,dy=e^y\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^y\cos y\,dy\\ &= e^{\frac{\pi}{2}}-\left(e^y\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^y\sin y\,dy\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I\end{aligned}$$

ולכן $I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

<u>שאלה 4.</u> מספר הפתרונות של המשוואה $x^6+x^4+x^2=e^{-\frac{x^2}{2}}$ הוא

א. 1 ב. 6 ג. 2 ד. 0 ה. 4

<u>התשובה הנכונה היא ג.</u>
נסמן $f(x)=x^6+x^4+x^2-e^{-\frac{x^2}{2}}$. הפונקציה f רציפה ומקיימת $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$ וכן $f(0)=-1$.

על סמך משפט ערך הביניים נובע מכך שיש לה לפחות שני שרשים: אחד בקרן $(0,\infty)$ ואחד בקרן $(-\infty,0)$.

עפ"י משפט $Rolle$ יש ל- f' לפחות שורש אחד בין כל שני שרשים של f. לכן אילו היו ל- f יותר משני שרשים, אז היו ל- f' לפחות שני שרשים שונים. אך זה לא נכון כי f' מונוטונית עולה ממש: נשתמש ב- $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'' = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ (ובכך ש- $e^{-\frac{x^2}{2}} \le 1$) ונקבל כי לכל x

$$f''(x) = 30x^4 + 12x^2 + 2 - (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} \ge 30x^4 + 11x^2 + 2 + e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

<u>שאלה 5.</u> תהי f הפונקציה המוגדרת בקטע $[-4,4]$ ע"י $f(x)=\sqrt{16-x^2}$. נסמן ב- A את הנקודה על הגרף של f שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2)$. אז a_2, הקואורדינטה השניה של A, היא

א. $\frac{8}{\sqrt{5}}$ ב. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ג. $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ד. $\frac{6}{\sqrt{5}}$ ה. $\frac{7}{\sqrt{5}}$

<u>התשובה הנכונה היא א.</u>

נסמן ב-

$$g(x) = (1-x)^2 + (2-\sqrt{16-x^2})^2 = 21 - 2x - 4\sqrt{16-x^2}$$

את ריבוע המרחק של הנקודה $(1,2)$ לנקודה $(x,\sqrt{16-x^2})$ על הגרף. ואז $g'(x) = -2 + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$, ו- $g'(x)=0$ כאשר $4x = 2\sqrt{16-x^2}$. נשים לב כי אגף ימין אי-שלילי ולכן הפתרון יקיים $x \ge 0$, וע"י העלאה בריבוע וחילוץ נקבל כי $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$, ולכן $y = \sqrt{16-x^2} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

נשים לב שזה באמת המינימום, כי $g'(x) < 0$ לכל $-4 < x < \frac{4}{\sqrt{5}}$ ו- $g'(x) > 0$ לכל $\frac{4}{\sqrt{5}} < x < 4$.

<u>הערה:</u> למעשה הפתרון נובע משיקול גיאומטרי פשוט: הגרף של f הוא חצי מעגל ברדיוס 4 שמרכזו בראשית, ולכן הנקודה A הקרובה ביותר ל- $(1,2)$ תהיה כפולה מתאימה שלה. היות ומרחקה של $(1,2)$ מהראשית היא $\sqrt{5}$ ומרחקה של A מהראשית הוא 4, נקבל כי $A = \frac{4}{\sqrt{5}}(1,2)$ ולכן $a_2 = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

<u>שאלה 6.</u> סמנו מיהם כל הטורים המתכנסים מבין הטורים הבאים.

1. $\sum_1^\infty \sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 2. $\sum_2^\infty \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$ 3. $\sum_1^\infty \tan\frac{1}{2n}$

א. 1 ב. $1,3$ ג. $2,3$ ד. $1,2$ ה. כולם

<u>התשובה הנכונה היא ד.</u>

הטור הראשון מתכנס לפי משפט לייבניץ: הפונקציה $\sin x$ היא אי-זוגית, מונוטונית עולה ב- $[0,1]$

ושואפת ל- 0 כאשר $x \to 0$. לכן הסדרה $\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ בעלת סימנים מתחלפים ושואפת ל- 0, ו- $\left|\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית יורדת.

הטור השני מתכנס כי

$$\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n\cdot\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n\cdot\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

ולכן הסכום החלקי ה- k-י הוא $\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(k+1)}$ (כסכום טלסקופי). אך $\frac{1}{\ln(k+1)} \to 0$ ולכן הטור מתכנס וסכומו הוא $\frac{1}{\ln 2}$.

הטור השלישי מתבדר. $\tan x \sim x$ עבור x-ים קטנים: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = 1$ ע"פי לופיטל. לכן בפרט $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$, והיות והטור חיובי נוכל להשתמש במשפט ההשוואה ונקבל שהוא מתכנס אסם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ מתכנס - אך טור זה מתבדר, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{2n}$ מתבדר.

<u>שאלה 7.</u> האינטגרל $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס אם ורק אם

א. $\alpha < 1$ ב. $\alpha < 2$ ג. $\alpha < 5$ ד. $\alpha < 3$ ה. $\alpha < 4$

<u>התשובה הנכונה היא ה.</u>

עפ"י טיילור $\sin x - x \sim x^3$ עבור x-ים קטנים, ולכן נשווה את האינטגרנד עם $\frac{1}{x^{\alpha-3}}$. עפ"י לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

המונה והמכנה חיוביים בקטע $(0,1]$, ולכן ע"ס משפט ההשוואה $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס אסם ורק $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3}}dx$ מתכנס, וידוע שזה קורה אסם $\alpha - 3 < 1$, כלומר, אסם $\alpha < 4$.

שאלות נכון/ לא נכון

<u>שאלה 8.</u> אם f רציפה ומונוטונית בסביבה של הנקודה x_0, אז f גזירה ב - x_0.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.

למשל

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \text{ כאשר} \\ 2x & x \ge 0 \text{ כאשר} \end{cases}$$

שאלה 9. אם $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ לכל x,y ממשיים, אז f קבועה.

א. נכון ב. לא נכון

נכון.
כי נראה עפ"י ההגדרה ש- $f'(x)=0$ לכל x. ובאמת לכל x_0 מתקיים

$$0 \le \left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\right| \le \left|\frac{(y-x_0)^2}{y-x_0}\right| = |y-x_0| \underset{y\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

לכן

$$\lim_{y\to x_0}\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\right| = 0 .$$

ולכן גם

$$f'(x_0) = \lim_{y\to x_0}\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = 0.$$

שאלה 10. רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n!}}x^n$ הוא $R=\infty$.

א. נכון ב. לא נכון

נכון.
כי

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+2)}{\sqrt{(n+1)!}}\cdot\frac{\sqrt{n!}}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

מכיון ש- $\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \to 1$ ו- $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

שאלה 11. אם הפונקציה f היא קעורה ($\frown$) בקטע הפתוח $(0,1)$, אז היא חסומה מלרע שם.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
למשל $f(x)=-\tan^2\frac{\pi x}{2}$ קעורה ואינה חסומה מלרע בקטע ($\lim_{x\to 1-}\tan^2\frac{\pi x}{2}=-\infty$). כדי לפשט את החישוב נעשה שינוי משתנה $t=\frac{\pi x}{2}$ ונבדוק את הפונקציה $-\tan^2 t$ בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$, ונקבל

$$(-\tan^2 t)'' = \left(-2\frac{\tan t}{\cos^2 t}\right)' = \left(-2\frac{\sin t}{\cos^3 t}\right)' = -2\frac{\cos^4 t + 3\sin^2 t\cos^2 t}{\cos^6 t} < 0$$

כי בכל הגורמים מופיעות רק חזקות זוגיות.

<u>שאלה 12.</u> סדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & |x| \le \frac{1}{n} \quad \text{כאשר} \\ -1 & x < -\frac{1}{n} \quad \text{כאשר} \\ 1 & x > \frac{1}{n} \quad \text{כאשר} \end{cases}$$

מתכנסת במידה שווה בקטע $[-1,1]$.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
המועמד להיות הגבול הוא הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \quad \text{כאשר} \\ 0 & x = 0 \quad \text{כאשר} \\ 1 & x > 0 \quad \text{כאשר} \end{cases}$$

וזו איננה פונקציה רציפה. אך ה- f_n-ים כולן רציפות ולכן ההתכנסות איננה יכולה להיות במידה שווה.

<u>שאלה 13.</u> אם f ו- g רציפות ומונוטוניות עולות בקרן $[0,\infty)$, ו- $g(x)$ חיובית שם, אז גם $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$ מונוטונית עולה שם.

א. נכון ב. לא נכון

לא נכון.
אם f שלילית אז F יורדת, ואם f משנה סימן F איננה מונוטונית כלל.

שאלות פתוחות

<u>שאלה 1.</u> (10%)
הוכיחו כי לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים:

$$\ln(1+\sin x) > \sin x - \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 x}{2}$$

פתרון

נגדיר $f(x)=\ln(1+\sin x)-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{\cos^2 x}{2}$ ונראה ש- $f(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x}-\cos x+\cos x\sin x \\ &= \cos x\left(\frac{1}{1+\sin x}-1+\sin x\right)=\cos x\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}>0 \end{aligned}$$

לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$. לכן f עולה ממש בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$, ומאחר ש- $f(0)=0$, $f(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$.

שאלה 2.

(6%) א. הגדירו:

(i) K הוא חסם מלעיל של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

פתרון

K הוא חסם מלעיל של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל n מתקיים: $a_n\le K$

(ii) M הוא חסם עליון (סופרימום) של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

פתרון

M הוא חסם עליון (סופרימום) של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם M הוא חסם המלעיל הקטן ביותר של הסדרה. ובאופן מפורש: $a_n\le M$ לכל n, ולכל $\varepsilon>0$ יש n_0 כך ש- $a_{n_0}>M-\varepsilon$.

(14%) ב. הוכיחו: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה וחסומה, אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון

יהי $M=\sup\limits_{n\ge1}\{a_n\}$ ונראה ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ל- M. נקבע $\varepsilon>0$ כלשהו, ואז בוודאי ש- $a_n\le M+\varepsilon$ לכל n (כי $a_n\le M<M+\varepsilon$). מצד שני $M-\varepsilon<M$, ולכן הוא אינו חסם מלעיל של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כלומר, קיים n_0 כך ש- $a_{n_0}>M-\varepsilon$. מאחר שהסדרה עולה, נקבל כי לכל $n\ge n_0$ מתקיים $a_n\ge a_{n_0}>M-\varepsilon$.

שאלה 3.

(6%) א. נסחו את משפט טיילור (כולל הנוסחאות המפורשות לפולינום טיילור ולשארית) על הקירוב של פונקציה בסביבת נקודה x_0 ע"י פולינום טיילור שלה מסדר n.

פתרון

תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0. אז לכל x בסביבה זו

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$$

כאשר $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ הוא פולינום טיילור מסדר n סביב x_0 של f, והשארית $R_n(x)$ ניתנת ע"י $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, כאשר c נקודת ביניים בין x לבין x_0.

(14%) ב. הוכיחו כי כשמשתמשים בפולינום טיילור מסדר $n=3$ סביב $x=0$ של $f(x)=e^x$ כדי לחשב את $\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, אז הטעות קטנה מ- 10^{-3}.

<u>פתרון</u>

לכל x,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

כאשר

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

עבור c מתאים בין 0 ל- x. אם $x \le 0$ אז גם $c \le 0$ ולכן $e^c \le e^0 = 1$ ו- $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

לכל $0 \le t \le 1$ נשתמש בהערכה זו עבור $x = \frac{-t^2}{2}$ ונקבל כי

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} + R_n(-\tfrac{t^2}{2})$$

כאשר $\left|R_n(-\frac{t^2}{2})\right| \le \frac{t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. לכן ניתן לקרב:

$$\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \approx \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!}dt$$

כשהשגיאה בקירוב זה היא:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 R_n(-\tfrac{t^2}{2})dt\right| &\le \int_0^1 \left|R_n(-\tfrac{t^2}{2})\right| dt \\
&\le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}dt \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(2n+3)(n+1)!}.
\end{aligned}$$

עבור $n=3$ מקבלים שהשגיאה קטנה מ- $\frac{1}{2^4(6+3)\,4!} = \frac{1}{3456} < 10^{-3}$